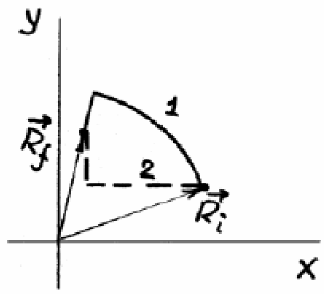
2.5 Trabalho de forças electrostáticas. Diferença de potencial e potencial eléctrico

Consideremos um campo devido a uma carga positiva Q. Uma outra carga q, também positiva, encontra-se a uma distância R_i da primeira. No deslocamento da carga q para uma posição $\vec{R}_f$ mais próxima do ponto O (onde está fixa a carga Q), a força electrostática (repulsiva) realiza um trabalho,

$$W = \int_{\mathrm{R_i}}^{\vec{R}_f} \vec{F} d\vec{l}\ ; \quad \vec{F} = q\vec{E}\,.$$

O integral é calculado ao longo da trajectória do deslocamento. Vamos calcular este trabalho para dois percursos diferentes:



1) Ao longo da circunferência (do raio R_i) e depois pelo raio;

2) Primeiro ao longo do eixo X e depois ao longo do Y.

<u>Percurso 1</u>

Ao longo da circunferência, a força (radial) é sempre normal à trajectória, por isso

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \text{o trabalho é nulo.}$$

No deslocamento radial,

$$W = \int_{\mathrm{R_i}}^{R_f} k\frac{Qq}{r_2}\vec{e}_r\vec{e}_r dr$$

$$= -kQq\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right) < 0 \qquad (43)$$

<u>Percurso 2</u>

Ao longo do X $\quad d\vec{l} = \vec{e}_x dx$,

$$W_1 = k\int_{x_i}^{x_f} Qq\frac{dx(\vec{e}_x\vec{e}_r)}{r^2} = kQq\int_{x_i}^{x_f}\frac{xdx}{r^3}$$

(porque $(\vec{e}_x\vec{e}_r) = \dfrac{x}{r}$),

$$= \int_{x_i}^{x_f}\frac{xdx}{\left(\sqrt{x^2+y_i^2}\right)^3}(kqQ) = -kqQ\int_{x_i}^{x_f}\frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\left(x^2+y_i^2\right)^{3/2}} = \frac{kqQ}{\left(x^2+y_i^2\right)^{1/2}}\Bigg|_{x_i}^{x_f}$$

Ao longo do Y $\quad d\vec{l} = \vec{e}_y dy$,

$$W_2 = kQq\int_{y_i}^{y_f}\frac{yd_y}{\left(x_f^2+y^2\right)^{3/2}} = -\frac{kqQ}{\left(x_f^2+y^2\right)^{1/2}}\Bigg|_{y_i}^{y_f}$$

O trabalho realizado total é:

$$W = W_1 + W_2 =$$

$$= kQq\left(\frac{1}{\left(x_i^2+y_i^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left(x_f^2+y_i^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{\left(x_f^2+y_i^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{\left(x_f^2+y_i^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$= kQq\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_f}\right),$$

ou seja, coincide com o resultado (43). Podemos concluir que o trabalho realizado pela força electrostática não depende do caminho, só depende das posições inicial e final da carga no campo. Nos consideramos o campo criado por uma carga pontual, mas, usando o princípio de sobreposição, podemos imediatamente concluir que o resultado acima obtido permanece válido para qualquer campo eléctrico estacionário.

A transferência da carga q foi efectuada por uma força externa (não electrostática). O trabalho desta força externa é igual e oposto ao da força electrostática, isto é, positivo na transferência acima considerada. Por outras palavras, a energia potencial da carga q aumentou a custa da fonte da força externa. Para uma carga de prova (q=1), o trabalho realizado pela força externa entre quaisquer dois pontos é uma característica do campo. Esta grandeza (o trabalho por unidade de carga) chama-se diferença de potencial eléctrico (d.d.p) entre dois pontos A e B,

$$\varphi_{AB} = -\int_B^A \vec{E}d\vec{l}\ , \tag{44}$$

onde o integral é calculado ao longo de qualquer trajectória que une os pontos B e A. A qualquer par de pontos de espaço onde existe campo eléctrico $\vec{E}$ corresponde uma diferença de potencial. A unidade da d.d.p. no sistema CGS não tem nome especial, chama-se

$$1 \text{ e.s.u. de d.d.p.} = \frac{1\,\text{erg}}{1\,\text{e.s.u. de carga}}$$

No sistema S.I., a unidade chama-se 1 Volt,

$$1\,V = \frac{1J}{1C} \approx \frac{1}{300}\ \text{e.s.u. de d.d.p} \tag{45}$$

Podemos dizer que $1J$ é o trabalho necessário para deslocar uma carga de $1C$ num campo eléctrico entre dois pontos para os quais a diferença de potencial é igual a $1V$.

O potencial eléctrico

Podemos escolher um ponto de referência (R) e calcular as d.d.p.'s entre qualquer outro ponto (A, B, ..) no campo e o ponto R: $\varphi_{AR}, \varphi_{BR},...$ A estas quantidades chamamos simplesmente potenciais nos respectivos pontos. E habitual escolher o infinito como o ponto de referência. Então, o potencial num ponto A seria

$$\varphi(\vec{R}_A) = -\int_\infty^A \vec{E}d\vec{l} \tag{46}$$

A Eq. (46) relaciona o potencial com a intensidade de campo eléctrico. Como é que podemos obter o campo eléctrico a partir do potencial, ou seja, inverter a Eq. (46)?

A diferença de potencial entre dois pontos muito próximos é

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l}$$

e o vector de deslocamento infinitesimal é

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \tag{47}$$

Por outro lado, $d\varphi$ (o diferencial do potencial) pode ser escrito assim:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

Então, temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

$$= - E_x dx - E_y dy - E_z dz \qquad (48)$$

Como os dx, dy, dz são <u>independentes</u>, a Eq. (48) significa que

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\ , \qquad (49)$$

ou seja,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$= -\vec{\nabla}\varphi \qquad (50)$$

onde, outra vez, surgiu o operador diferencial "nabla" definido na Eq.(42). Este operador, quando aplicado a uma função escalar (como o potencial) é chamado <u>gradiente</u>:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi \qquad (50a)$$

A Eq.(50) é a desejada relação inversa para achar o campo eléctrico a partir do potencial. O potencial, em função das coordenadas do ponto no qual está definido, chama-se <u>função potencial</u>. A função potencial do campo devido a uma carga pontual obtém-se logo da Eq.(43):

$$\varphi(\vec{R}) = k\frac{Q}{R} \qquad (51)$$

Como a função φ é relacionada com o campo eléctrico $\vec{E}$ de uma forma linear, <u>o princípio de sobreposição aplica-se também à função potencial.</u> Deste modo, podemos escrever uma relação análoga a Eq. (25):

$$\varphi(x, y, z) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta Q_i}{\left|\vec{R} - \vec{R}_i\right|}$$

ou, para uma distribuição contínua de cargas,

$$\varphi(x, y, z) = k\int \frac{\rho(x', y', z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \qquad (52)$$

onde o integral e calculado sobre todo o espaço onde $\rho \neq 0$. Através da Eq.(52), pode-se calcular a função potencial dada uma distribuição contínua de carga. No entanto, existe um método mais conveniente.

<u>Equação de Poisson</u>

Utilizando o teorema de Gauss na sua forma diferencial (41) e a relação (50), podemos escrever:

$$\mathrm{div}(-\mathrm{grad}\varphi) = k4\pi\rho \qquad (53)$$

Lembrando a definição (42), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x(\vec{e}_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial \varphi}{\partial z}) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y(\vec{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z})+$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z(\vec{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z})=$$
$$=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi\equiv\Delta\varphi\,.$$

Este operador diferencial (da 2-a ordem) designado Δ (ou ∇^2) chama-se operador de Laplace (ou Laplaciano). Então, Eq.(53) pode ser escrita sob a forma:

$$\nabla^2\varphi=-k4\pi\rho\,, \tag{54}$$

que se chama a equação de Poisson. É uma equação diferencial da 2-a ordem, que permite calcular o potencial a partir de distribuição de carga.

Superfícies equipotenciais

A equação

$$\varphi(\vec{R})=\text{const}$$

determina uma superfície no espaço tridimensional. A forma da superfície, para o mesmo campo, depende do valor da constante. Estas superfícies são chamadas superfícies equipotenciais. De acordo com a Eq.(50a), as linhas de campo são sempre perpendiculares às superfícies equipotenciais. Por exemplo, as superfícies equipotenciais do campo criado por uma carga pontual são esferas concêntricas.

2.6 Energia potencial de um sistema de cargas

Consideremos a energia necessária para construir uma distribuição de n cargas pontuais ($Q_1,Q_2,.....Q_n$) que ficam nos pontos $\vec{R}_1,\vec{R}_2,...\vec{R}_n$. Imaginemos que as cargas estavam inicialmente no infinito e vamos traze-las, uma de cada vez, do infinito para a sua posição $\vec{R}_i$. Começamos pela primeira. O trabalho necessário para o deslocamento é nulo porque, para já, não há campo eléctrico. Então,

$$W_1=0$$

Para a segunda, já é necessário realizar algum trabalho, nomeadamente,

$$W_2=Q_2\varphi_1(\vec{R}_2)=kQ_1Q_2\frac{1}{R_{12}}\,, \longleftarrow \text{A distância entre 1 e 2}$$

onde $\varphi_1(\vec{R}_2)$ é o potencial criado pela carga 1 no ponto $\vec{R}_2$. Para a terceira partícula,

$$W_3=Q_3\left(\varphi_1(R_3)+\varphi_2(R_3)\right)=kQ_1Q_3\frac{1}{R_{13}}+kQ_2Q_3\frac{1}{R_{23}}$$

Continuemos assim até a última partícula ser colocada no sítio. O trabalho total realizado será:

$$W=\sum_{i=1}^{n}W_i=0+kQ_1Q_2\frac{1}{R_{12}}+...$$

$$=k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}Q_iQ_j\frac{1}{R_{ij}} \tag{55}$$

A outra maneira de fazer o mesmo seria começar pela carga número n, depois carga

(n-1), etc. Assim, em vez da Eq.(55) teríamos:

$$W_n = 0\,; \quad W_{n-1} = kQ_nQ_{n-1}\frac{1}{R_{n,n-1}};\ldots$$

$$W = k\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=n-i+1}^{n} Q_iQ_j\frac{1}{R_{ij}} \quad = k\sum_{i'=1}^{n}\sum_{j=i'+1}^{n} Q_{i'}Q_j\frac{1}{R_{i'j}} \tag{55a}$$

(onde mudamos o índice de soma para $i' = n - i$). Utilizando (55) e (55a), podemos escrever:

$$2W = k\sum_{i=1}^{n}\left\{ \sum_{j=1}^{i-1}\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} \right\} = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} \tag{56}$$

A energia potencial de um sistema de cargas é igual ao trabalho necessário para construir este sistema. Então, a energia potencial do sistema de n cargas pontuais é dada por

$$U = W = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} \tag{57}$$

A relação (57) tem um significado simples: a energia de um sistema de cargas é a soma das energias das interacções em pares entre todas as cargas do sistema:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{n} U_{ij}, \qquad U_{ij} = k\frac{Q_iQ_j}{R_{ij}} \tag{57a}$$

O factor ½ serve para não contarmos cada par de cargas por duas vezes. Podemos notar que

$$k\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}\frac{Q_j}{R_{ij}} = \varphi(\vec{R}) \equiv \varphi_i\,,$$

é o potencial criado por todas as cargas, a menos a carga de número i, no ponto $\vec{R}_i$.

Então, podemos reescrever (57) sob a seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i\;. \tag{57b}$$

Para uma distribuição contínua de cargas, substituímos Q_i por ρdV e o somatório pelo integral no volume. Assim temos:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dV\;. \tag{58}$$

Essa energia potencial é igual ao trabalho realizado pelas forças eléctricas na passagem de uma distribuição (contínua) de cargas, ρ, para a situação em que $\rho = 0$ em qualquer ponto do espaço. Essa última situação pode ser realizada pela disperção de todas as cargas ao infinito.

A fórmula (58) pode ser escrita sob outra forma. Usando a equação de Poisson (54), podemos escrever:

$$U = \frac{1}{2}\int\frac{\Delta\varphi}{(-4\pi k)}\varphi dV = -\frac{1}{8\pi k}\int\varphi\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi)dV$$

onde o integral é calculado no volume do espaço todo onde há campo eléctrico ($\varphi \neq 0$).
Integrando por partes, temos:

$$U = -\frac{1}{8\pi k}\left\{\oint \varphi \vec{\nabla}\varphi d\vec{S} - \int (\vec{\nabla}\varphi)^2 dV\right\}$$

↑ (*sobre o volume infinito*)

(*sobre uma superfície que encerra o volume infinito*)

$$= \frac{1}{8\pi k}\int (\vec{E})^2 dV \qquad (59)$$

A fórmula (59) permite calcular a energia dum campo eléctrico através da sua intensidade.

Resumo

1) As forças electrostáticas obedecem à lei de Coulomb (2). Essa interacção é considerada como o resultado de acção do campo eléctrico devido a carga 1 sobre a carga 2, e vice versa.
2) O campo eléctrico pode ser caracterizado ou pela sua intensidade, $\vec{E}$, ou pela função potencial φ. A relação entre estas grandezas é dada pelas equações:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad ; \quad \varphi = -\int_{\infty}^{\vec{R}} \vec{E}d\vec{l} \ .$$

3) O objectivo principal da electrostática é calcular o campo eléctrico para uma distribuição conhecida de cargas eléctricas. Este problema pode ser resolvido, em princípio, de várias maneiras (mas no fundo sempre estão a lei de Coulomb e o princípio de sobreposição):
(i) aplicação directa da lei de Coulomb e do princípio de sobreposição,
(ii) cálculo do fluxo eléctrico – a lei de Gauss,
(iii) através da forma diferencial da lei de Gauss,
(iv) através de resolução da equação de Poisson (ou Laplace) para o φ.
4) Um sistema de carga possuiu ma energia potencial, que pode ser calculada como a soma das energias das interacções em pares entre todas as cargas que constituem o sistema. Alternativamente, essa energia pode ser calculada como a energia do campo eléctrico criado pelas cargas (Eq.(59)).